●۵۰۰- انرژی جنبشی پدری که با پسرش مسابقه دو می‌دهد نصف انرژی جنبشی پسرش است و پسر نصف پدر جرم دارد. وقتی که پدر بر تندی خود به میزان $۱/۰\,\text{m/s}$ می‌افزاید، همان انرژی جنبشی پسر را دارد. تندی‌های اولیهٔ (الف) پدر و (ب) پسر چقدر بوده است؟

حل: جرم پدر را با m و تندی اولیه او را با v_i نشان می‌دهیم. انرژی اولیه پدر عبارت است از

$$K_i = \frac{۱}{۲} K_{\text{son}}$$

و انرژی جنبشی نهایی او (وقتی تندی‌اش برابر $v_f = v_i + ۱۰\,\text{m/s}$ است) برابر است با $K_f = K_{\text{son}}$. از این رابطه‌ها و رابطهٔ ۷-۱ برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

(الف) با استفاده از رابطه‌های بالا $K_i = \frac{۱}{۲} K_f$ است (یکاها، SI هستند) که در نتیجه:

$$\frac{۱}{۲} m v_i^۲ = \frac{۱}{۲}\left[\frac{۱}{۲} m (v_i + ۱/۰\,\text{m/s})^۲\right]$$

Scanned by CamScanner

جرم حذف می‌شود و معادله درجه دومی به‌صورت $\frac{1}{2}v_i^2 - v_i^2 - \frac{1}{2} = 0$ برای v_i به‌دست می‌آید. ریشهٔ مثبت برابر است با $v_i = 2/4\,\text{m/s}$.

(ب) با توجه به رابطهٔ اول $K_i = \frac{1}{2}K_{\text{son}}$ داریم

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(m/2)v_{\text{son}}^2\right)$$

بعد از حذف جرم و یکی از ضریب‌های $\frac{1}{2}$ داریم $v_{son} = 2v_i = 4/8\,\text{m/s}$.

Scanned by CamScanner

$= ۶/۸ J$

●●۱۱۰۰- یک نیروی ۱۲/۰ نیوتـــونی بـا سـمتگیری ثابـت روی ذره‌ای کـار انجـام می‌دهـد بـه گـونـه‌ای کـه ذره جابـــه‌جـایی $\vec{d} = (۲/۰۰\hat{i} - ۴/۰۰\hat{j} + ۳/۰۰\hat{k}) m$ را پیدا می‌کند. زاویـهٔ میـان نیرو و جابه‌جایی در صورتی که تغییر انرژی جنبشی ذره (الف) $+۳۰/۰ J$ و (ب) $-۳۰/۰ J$ باشد، چقدر است؟

حل: با استفاده از قضیه کار- انرژی جنبشی داریم

$$\Delta K = W = \vec{F} \cdot \vec{d} = F\, d \cos\phi$$

از طرفی $F = ۱۲ N$ و بزرگی $\vec{d}$ برابر است با

$$d = \sqrt{(۲/۰۰ m)^۲ + (-۴/۰۰ m)^۲ + (۳/۰۰ m)^۲}$$
$$= ۵/۳۹ m$$

(الف) اگر $\Delta K = +۳۰/۰ J$ باشد، آن‌گاه

$$\phi = \cos^{-۱}\left(\frac{\Delta K}{Fd}\right) = \cos^{-۱}\left(\frac{۳۰/۰ J}{(۱۲/۰ N)(۵/۳۹ m)}\right) = ۶۲/۳^\circ$$

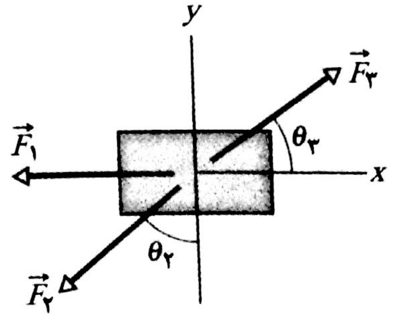
(ب) اگر $\Delta K = -۳۰/۰ J$ باشد، آن‌گاه

$$\phi = \cos^{-۱}\left(\frac{\Delta K}{Fd}\right) = \cos^{-۱}\left(\frac{-۳۰/۰ J}{(۱۲/۰ N)(۵/۳۹ m)}\right) = ۱۱۸^\circ$$

Scanned by CamScanner

می‌باشد.

۱۴۰۰●● - شکل ۷-۲۷ ، دید از بالای سه نیروی افقی وارد بر یک محمولهٔ بار را نشان می‌دهد. محموله که در ابتدا ساکن بوده است، اکنون روی کف بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_۱ = ۳/۰۰N$ ،$F_۲ = ۴/۰۰N$ ، و $F_۳ = ۱۰/۰N$ ، و زاویه‌های نشان داده شده در شکل عبارت‌اند از $\theta_۲ = ۵۰/۰°$ و $\theta_۳ = ۳۵/۰°$. کار خالص انجام شده روی محموله توسط این سه نیرو در حین نخستین ۴/۰۰m جابه‌جایی چقدر است؟



شکل ۷-۲۷ مسئلهٔ ۱۴

حل: همهٔ نیروها ثابت هستند، بنابراین کار کل انجام شده توسط آن‌ها با رابطهٔ $W = F_{net}\Delta x$ داده می‌شود که F_{net} بزرگی نیروی خالص و Δx بزرگی جابه‌جایی است. این سه بردار را با هم جمع می‌کنیم تا مؤلفه‌های x و y نیروی خالص را به‌دست بیاوریم

$$F_{net} = -F_۱ - F_۲ \sin ۵۰/۰° + F_۳ \cos ۳۵/۰°$$
$$= -۳/۰۰N - (۴/۰۰N)\sin ۳۵/۰° + (۱۰/۰N)\cos ۳۵/۰°$$
$$= ۲/۱۳N$$
$$F_{net\,y} = -F_۲ \cos ۵۰/۰° + F_۳ \sin ۳۵/۰°$$
$$= -(۴/۰۰N)\cos ۵۰/۰° + (۱۰/۰N)\sin ۳۵/۰°$$
$$= ۳/۱۷N$$

بزرگی نیروی خالص برابر است با

$$F_{net} = \sqrt{F_{net\,x}^۲ + F_{net\,y}^۲} = \sqrt{(۲/۱۳N)^۲ + (۳/۱۷N)^۲}$$
$$= ۳/۸۲N$$

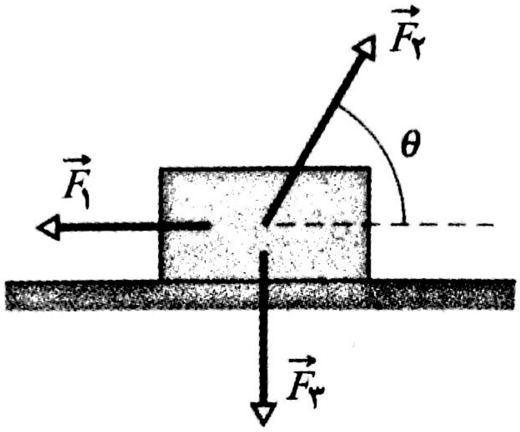
با به‌کار بردن بزرگی نیروی خالص داریم

$$W = F_{net}\, d = (۳/۸۲N)(۴/۰۰m) = ۱۵/۳J$$

از این نکته استفاده کرده‌ایم که $\vec{d} \parallel \vec{F}_{net}$ (محموله از حالت سکون شروع به حرکت کرده است و تحت تأثیر نیروهای افقی به‌صورت افقی حرکت می‌کند که اثر برآیند آن با $\vec{F}_{net}$ بیان می‌شود).

Scanned by CamScanner

۱۵۰۰- شکل ۷-۲۸ سه نیروی وارد شده بر یک جعبهٔ بزرگ را نشان می‌دهد که جعبه را $۳/۰۰\,m$ روی کف بدون اصطکاکی به سمت چپ حرکت می‌دهند. بزرگی نیروها عبارت‌اند از $F_۱ = ۵/۰۰\,N$، $F_۲ = ۹/۰۰\,N$، و $F_۳ = ۳/۰۰\,N$، و زاویهٔ نشان داده شده در شکل $\theta = ۶۰/۰^\circ$ است. در طی جابه‌جایی (الف) کار خالص انجام شده روی جعبه توسط این سه نیرو چقدر است؟ و (ب) آیا انرژی جنبشی جعبه افزایش می‌یابد یا کاهش؟



شکل ۷-۲۸ مسئلهٔ ۱۵

حل: (الف) نیروها ثابت هستند بنابراین کار انجام شده توسط هر نیرو با رابطهٔ $W = \vec{F}\cdot\vec{d}$ داده می‌شود که $\vec{d}$ جابه‌جایی است. $\vec{F}_۱$ در جهت جابه‌جایی است:

$$W_۱ = F_۱\, d\cos\phi_۱ = (۵/۰۰\,N)(۳/۰۰\,m)\cos ۰^\circ = ۱۵/۰\,J$$

$\vec{F}_۲$ زاویهٔ ۱۲۰° با جابه‌جایی می‌سازد:

$$W_۲ = F_۲ d\cos\phi_۲ = (۹/۰۰\,N)(۳/۰۰\,m)\cos ۱۲۰^\circ = -۱۳/۵\,J$$

$\vec{F}_۳$ عمود بر جابه‌جایی است:

$$W_۳ = F_۳\, d\cos\phi_۳ = ۰ \qquad \cos ۹۰^\circ = ۰$$

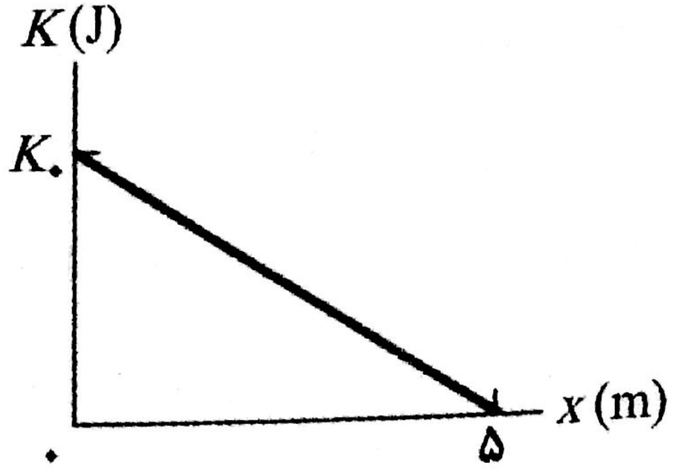
کار خالص انجام شده توسط این سه نیرو برابر است با

$$W = W_۱ + W_۲ + W_۳ = ۱۵/۰\,J - ۱۳/۵\,J + ۰ = +۱/۵۰\,J$$

(ب) اگر نیروی دیگری بر جعبه وارد نشود، انرژی جنبشی به اندازه $۱/۵۰\,J$ افزایش می‌یابد.

Scanned by CamScanner

●●●۱۶- GO جسمی به جرم $8/0\,kg$ در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند. وقتی جسم از $x=0$ می‌گذرد، نیروی ثابتی در امتداد محور x شروع به تأثیر روی آن می‌کند. شکل ۷-۲۹ انرژی جنبشی K جسم را برحسب مکان آن هنگامی که از $x=0$ به $x=5/0\,m$ می‌رود نشان می‌دهد. $K_0=30/0\,J$ است. نیرو به طور پیوسته بر جسم وارد می‌شود. وقتی جسم رو به عقب حرکت کند، تندی v آن در $x=-3/0\,m$ چقدر است؟



شکل ۷-۲۹ مسئلهٔ ۱۶

Scanned by CamScanner

حل: تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = \frac{۱}{۲} m (v_f^۲ - v_i^۲) = \frac{۱}{۲} m (۲a\Delta x) = ma\Delta x$$

که از رابطهٔ $v_f^۲ = v_i^۲ + ۲a\Delta x$ استفاده شده است. با توجه به شکل وقتی $\Delta x = ۵\,\mathrm{m}$ است آن‌گاه $\Delta K = (۰ - ۳۰)\mathrm{J} = -۳۰\,\mathrm{J}$ است بنابراین شتاب برابر است با

$$a = \frac{\Delta K}{m\Delta x} = \frac{(-۳۰\,\mathrm{J})}{(۸/۰\,\mathrm{kg})(۵/۰\,\mathrm{m})} = -۰/۷۵\,\mathrm{m/s^۲}$$

علامت منفی نشان می‌دهد که سرعت جسم کم می‌شود. همچنین با توجه به شکل در $x = ۵\,\mathrm{m}$ انرژی جنبشی صفر می‌شود. یعنی جسم به‌طور لحظه‌ای ساکن می‌شود. بنابراین

$$v_۰^۲ = v^۲ - ۲a\Delta x = ۰ - ۲(-۰/۷۵\,\mathrm{m/s^۲})(۵/۰\,\mathrm{m})$$

$$= ۳/۵\,\mathrm{m^۲/s^۲} \Rightarrow v_۰ = ۲/۷\,\mathrm{m/s}$$

تندی جسم در $x = -۳/۰\,\mathrm{m}$ برابر است با

$$v = \sqrt{v_۰^۲ + ۲a\Delta x} = \sqrt{۷/۵\,\mathrm{m^۲/s^۲} + ۲(-۰/۷۵\,\mathrm{m/s^۲})(-۳/۰\,\mathrm{m})}$$

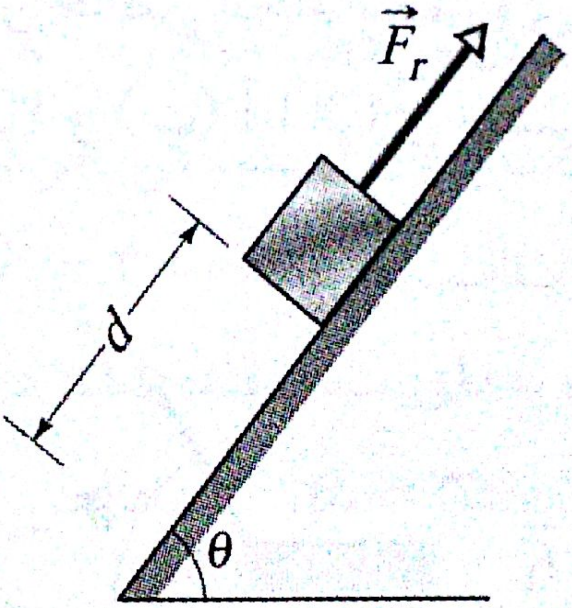
$$= \sqrt{۱۲}\,\mathrm{m/s} = ۳/۵\,\mathrm{m/s}$$

Scanned by CamScanner

۱۹۰۰- ●● GO در شکل ۷-۳۰، وقتی به قالب یخی توسط یک طناب نیروی $\vec{F}_r$ به بزرگی ۵۰N و رو به بالای سطح

Scanned by CamScanner

شیبداری با زاویهٔ شیب $\theta = ۵۰^\circ$ وارد شود، قالب یخ رو به پایین بر سطح شیبدار بدون اصطکاک می‌لغزد. وقتی قالب یخ به اندازهٔ مسافت $d = ۰/۵۰ \mathrm{m}$ در امتداد شیب بلغزد، انرژی جنبشی آن به اندازهٔ $۸۰\mathrm{J}$ افزایش می‌یابد. اگر طناب به قالب یخ متصل نشده باشد، انرژی جنبشی آن چقدر بیشتر می‌شود؟



شکل ۷–۳۰ مسئلهٔ ۱۹

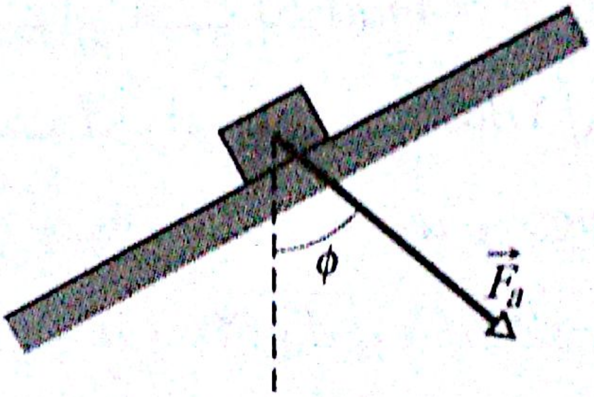
حل: رابطهٔ ۷–۱۵ را به‌کار می‌بریم. اما صورت مسئله پیشنهاد می‌کند که فقط لازم است سهم طناب آن را بررسی کنیم (که با W_a نشان می‌دهیم):

$$W_a = -(۵۰\mathrm{N})(۰/۵\mathrm{m}) = -۲۵\mathrm{J}$$

علامت منفی به این معنی است که کشش طناب پادموازی حرکت قالب یخ است. بنابراین اگر طناب به قالب یخ متصل نباشد انرژی جنبشی به اندازهٔ $۲۵\mathrm{J}$ بزرگ‌تر خواهد بود.

Scanned by CamScanner

●●۲۳- در شکل ۷-۳۲، نیروی ثابت $\vec{F}_a$، به بزرگی $82/0\,N$ بر جعبهٔ کفشی به جرم $3/00\,kg$ در زاویهٔ $\phi = 53/0°$ وارد شده و بدین ترتیب باعث حرکت رو به بالای جعبه با تندی ثابت روی یک شیب بدون اصطکاک شده است. وقتی جعبه تا مسافت قائم $h = 0/150\,m$ حرکت کند، چقدر کار توسط $\vec{F}_a$ روی جعبه انجام شده است؟



شکل ۷-۳۲ مسئلهٔ ۲۳

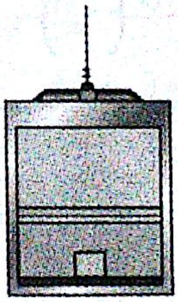
حل: این واقعیت که نیروی وارد شدهٔ $\vec{F}_a$ موجب می‌شود که جعبه روی سطح بدون اصطکاک با تندی ثابت به بالا حرکت کند، نشان می‌دهد که تغییری در انرژی جنبشی وجود ندارد $\Delta K = 0$. بنابراین کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ باید منفی کار انجام شده توسط گرانش باشد: $W_a = -W_g$. چون جعبه به‌صورت عمودی به‌اندازهٔ $h = 0/15\,m$ بالا می‌رود داریم:

$$W_g = m\vec{g}\cdot\vec{d} = -mgh \Rightarrow$$

$$W_a = +mgh = (3/00\,kg)(9/80\,m/s^2)(0/150\,m) = 4/41\,J$$

Scanned by CamScanner

۲۵●●●- GO در شکل ۷-۳۴، قالب پنیری به جرم ۰/۲۵۰kg بر کف اتاقک بالابری به جرم ۹۰۰ kg قرار دارد. اتاقک توسط کابلی نخست به اندازهٔ مسافت $d_1 =$ ۲/۴۰ m و سپس به اندازهٔ $d_2 =$ ۱۰/۵ m رو به بالا کشیده می‌شود. (الف) اگر در طی مسافت d_1، نیروی عمودی وارد بر قالب پنیر از سوی کف مقدار ثابت $F_N =$ ۳/۰۰ N را داشته باشد، چقدر کار توسط کابل روی اتاقک انجام شده است؟ (ب) اگر در طی مسافت d_2 کار انجام شده روی اتاقک توسط نیروی (ثابت) کابل برابر با ۹۲/۶۱ kg باشد، بزرگی F_N چقدر است؟



شکل ۷-۳۴ مسئلهٔ ۲۵

حل: (الف) نیروی خالص به سمت بالا برابر است با

$$F + F_N - (m+M)g = (m+M)a$$

$$\Rightarrow F = (m+M)(a+g) - F_N$$

که $m =$ ۰/۲۵kg جرم قالب پنیر و $M =$ ۹۰۰kg جرم بالابر است، F نیروی وارد از طرف کابل و $F_N =$ ۳/۰۰N نیروی عمودی وارد بر قالب پنیر است. درمورد قالب پنیر داریم

$$F_N - mg = ma \Rightarrow a = \frac{۳/۰۰\text{N} - (۰/۲۵۰\text{kg})(۹/۸۰\text{m/s}^۲)}{۰/۲۵۰\text{kg}}$$

$$= ۲/۲۰\text{m/s}^۲$$

بنابراین نیروی کابل برابر است با

Scanned by CamScanner

$$F = (m+M)(a+g) = F_N$$

$$= (۰/۲۵۰\,\text{kg} + ۹۰۰\,\text{kg})(۲/۲۰\,\text{m/s}^۲ + ۹/۸۰\,\text{m/s}^۲) - ۳/۰۰\,\text{N}$$

$$= ۱/۰۸ \times ۱۰^۴\,\text{N}$$

و بنابراین کار انجام شده به‌وسیلهٔ کابل روی اتاقک برابر است با

$$W = F d_۱ = (۱/۸۰ \times ۱۰^۴\,\text{N})(۲/۴۰\,\text{m}) = ۲/۵۹ \times ۱۰^۴\,\text{J}$$

(ب) اگر $W = ۹۲/۶۱\,\text{kJ}$ و $d_۲ = ۱۰/۵\,\text{m}$ باشد، بزرگی نیروی عمودی برابر است با

$$F_N = (m+M)g - \frac{W}{d_۲}$$

$$= (۰/۲۵۰\,\text{kg} + ۹۰۰\,\text{kg})(۹/۸۰\,\text{m/s}^۲) - \frac{۹/۲۶۱ \times ۱۰^۴\,\text{J}}{۱۰/۵\,\text{m}}$$

$$= ۲/۴۵\,\text{N}$$

Scanned by CamScanner

●●۳۱۰- SSM WWW تنها نیروی وارد بر جسمی به جرم $۲/۰\,kg$ هنگامی که در جهت مثبت محور x حرکت می‌کند، دارای مؤلفهٔ x به صورت $F_x = -۶x\ N$ است که در آن x بر حسب متر است. سرعت جسم در $x = ۳/۰\,m$ برابر با $۸/۰\,m/s$ است. (الف) سرعت جسم در $x = ۴/۰\,m$ چقدر است؟ (ب) در چه مقدار مثبتی از x، جسم دارای سرعت $۵/۰\,m/s$ است؟

حل: **فکر کنید.** نیروی وارد شده با x تغییر می‌کند، بنابراین برای یافتن کار انجام شده روی جسم باید از انتگرال‌گیری استفاده کنیم.

بیان کنید. وقتی جسم از $x_i = ۳/۰\,m$ تا $x_f = ۴/۰\,m$ در امتداد محور x حرکت می‌کند، کار انجام شده روی جسم توسط نیرو برابر است با:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x\,dx = \int_{x_i}^{x_f} -۶\,x\,dx = -۳(x_f^۲ - x_i^۲)$$

$$= -۳(۴/۰^۲ - ۳/۰^۲) = -۲۱J$$

طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W = \Delta K = \frac{۱}{۲}m(v_f^۲ - v_i^۲)$$

که v_i سرعت اولیه (در x_i) و v_f سرعت نهایی (در x_f) است. با داشتن v_i، v_f را به‌دست می‌آوریم.

تحلیل کنید. (الف) با استفاده از قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$v_f = \sqrt{\frac{۲W}{m} + v_i^۲} = \sqrt{\frac{۲(-۲۱J)}{۲/۰kg} + (۸/۰m/s)^۲} = ۶/۶\,m/s$$

(ب) سرعت ذره وقتی در $x = x_f$ قرار دارد برابر است با $v_f = ۵/۰\,m/s$. برای یافتن x_f از قضیه کار- انرژی جنبشی استفاده می‌کنیم. کار خالص انجام شده روی ذره عبارت است از: $W = -۳(x_f^۲ - x_i^۲)$. بنابراین

Scanned by CamScanner

$$W = \Delta K \Rightarrow -۳(x_f^۲ - x_i^۲) = \frac{۱}{۲} m(v_f^۲ - v_i^۲)$$

$$x_f = \sqrt{-\frac{m}{۶}(v_f^۲ - v_i^۲) + x_i^۲}$$

$$= \sqrt{-\frac{۲/۰\text{kg}}{۶\text{N/m}}((۵/۰\text{m/s})^۲ - (۸/۰\text{m/s})^۲) + (۳/۰\text{m})^۲}$$

$$= ۴/۷\text{m}$$

بیاموزید. چون $x_f > x_i$، $W = -۳(x_f^۲ - x_i^۲) < ۰$، یعنی کار انجام شده توسط نیرو منفی است و در نتیجه $\Delta K < ۰$ است. بنابراین وقتی ذره در راستای x+ حرکت می‌کند، تندی‌اش کاهش می‌یابد.

Scanned by CamScanner

۳۳-●●●● قطعهٔ شکل ۷-۱۰ الف روی سطح افقی بدون اصطکاکی قرار دارد و ثابت فنر برابر با ۵۰N/m است. در ابتدا، فنر در طول واهلیده‌اش واقع است و قطعه به حالت سکون در مکان $x = ۰$ قرار دارد. آنگاه یک نیروی خارجی با بزرگی ثابت $۳/۰ \text{N}$ قطعه را آنقدر در جهت مثبت محور x می‌کشد تا سرانجام متوقف شود. وقتی قطعه به نقطهٔ توقف برسد (الف) مکان قطعه چیست؟ (ب) کاری که توسط نیروی خارجی بر قطعه انجام شده چقدر است؟ و (پ) کار انجام شده توسط نیروی فنر بر قطعه چقدر است؟ در طی جابه‌جایی قطعه (ت) مکان قطعه به هنگامی که انرژی جنبشی آن بیشینه است چیست و (ث) مقدار آن انرژی جنبشی بیشینه چقدر است؟

حل: (الف) با به‌کار بردن رابطهٔ ۷-۲۸ داریم:

$$\Delta K = ۰ \Rightarrow W_s + W_F = ۰ \Rightarrow W_s = -W_F$$

$$W_s = -\frac{۱}{۲}kx^۲ ,\ W_F = F\,x$$

$$Fx = \frac{۱}{۲}k\,x^۲ \Rightarrow (۳/۰\text{N})\,x = \frac{۱}{۲}(۵۰\,\text{N/m})\,x^۲$$

$$\Rightarrow x = (۳/۰/۲۵)\text{m} = ۰/۱۲\text{m}$$

(ب) کار انجام شده توسط نیروی اعمال شده برابر است با

$$W_f = Fx = (۳/۰\text{N})(۰/۱۲\text{m}) = ۰/۳۶\text{J}$$

(پ)

$$W_s = -W_a = -۰/۳۶\text{J}$$

(ت) با در نظر گرفتن $K_i = ۰$ و $K_f = K$ به‌عنوان متغیر داریم $K = Fx - \frac{۱}{۲}k\,x^۲$. از K نسبت به x مشتق می‌گیریم و نتیجه را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$\frac{dK}{dx} = ۰ \Rightarrow -kx + F = ۰$$

$$\Rightarrow x_c = \frac{F}{k} = (۳/۰/۵۰)\text{m} = ۰/۰۶۰\text{m}$$

x_c مکانی است که K در آن‌جا بیشینه است. همچنین نقطه‌ای است که نیروهای اعمالی و فنر با هم در تعادل هستند.

(ث) در x_c داریم $K = K_{\max} = ۰/۰۹۰\text{J}$

Scanned by CamScanner

●●۳۹- GO نیـــــروی $\vec{F}=(cx-۳/۰۰x^۲)\hat{\mathrm{i}}$ کـــــه در آن $\vec{F}$ برحسب نیوتون، x برحسب متر و c ثابت است، بر ذره‌ای که در امتداد محور x حرکت می‌کند، وارد می‌شود. انرژی جنبشـی ذره در $x=۰$ برابر ۲۰/۰J، و در $x=۳/۰۰\mathrm{m}$ برابر ۱۱/۰J اسـت. c را پیدا کنید.

حـــل: وقتـــی جســـم در امتـــداد محـــور x از $x_i=۰\mathrm{m}$ تـــا $x_f=۳/۰۰\mathrm{m}$ حرکت می‌کند، کار انجام شده به‌وسیلهٔ این نیرو برابر است با

$$W=\int_{xi}^{x_f}F_x\,dx=\int_{x_i}^{x_f}(cx-۳/۰۰x^۲)\,dx$$

$$=\left(\frac{c}{۲}x^۲-x^۳\right)_۰^۳=\frac{c}{۲}(۳/۰۰)^۲-(۳/۰۰)^۳=۴/۵۰c-۲۷/۰$$

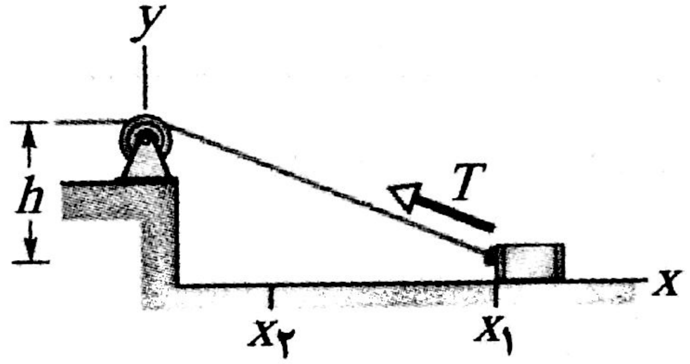
از طرفی طبق قضیه کار- انرژی جنبشی داریم:

$$W=\Delta K=(۱۱/۰-۲۰/۰)\mathrm{J}=-۹/۰۰\,\mathrm{J}$$

$$۴/۵۰c-۲۷/۰=-۹/۰۰\Rightarrow c=۴/۰۰\,\mathrm{N/m}$$

Scanned by CamScanner

●●●۴۲- شکل ۷-۴۱ ریسمانی را نشان می‌دهد که به گاری متصل شده است و می‌تواند روی ریل افقی بدون اصطکاکی در امتداد محور x حرکت کند. انتهای چپ ریسمان از روی قرقره‌ای با جرم و اصطکاک ناچیز در ارتفاع ریسمان $h = ۱/۲۰\text{m}$ گذشته است. وقتی ارابه از $x_۱ = ۳/۰۰\text{m}$ تا $x_۲ = ۱/۰۰\text{m}$ بلغزد، ریسمان کشش ثابت $۲۵/۰\text{N}$ را دارد. در طی این حرکت، تغییر در انرژی جنبشی ارابه چقدر است؟



شکل ۷-۴۱ مسئلهٔ ۴۲

حل: از قضیه کار- انرژی جنبشی برای حل مسئله استفاده می‌کنیم.

$$\Delta K = W$$

در این مسئله کار انجام شده برابر است با $W = Fd$، که F نیروی کشش ریسمان و d طولی از ریسمان است که گاری را از $x_۱$ تا $x_۲$ می‌کشد. با توجه به شکل داریم:

$$d = \sqrt{x_۱^۲ + h^۲} - \sqrt{x_۲^۲ + h^۲}$$

$$= \sqrt{(۳/۰۰\text{m})^۲ + (۱/۲۰\text{m})^۲} - \sqrt{(۱/۰۰\text{m})^۲ + (۱/۲۰\text{m})^۲}$$

$$= ۳/۲۳\text{m} - ۱/۵۶\text{m} = ۱/۶۷\text{m}$$

$$\Delta K = Fd = (۲۵/۰\text{N})(۱/۶۷\text{m}) = ۴۱/۷\text{J}$$

Scanned by CamScanner

●●●۵۱- نیروی $\vec{F} = (۳/۰۰\text{N})\hat{i} + (۷/۰۰\text{N})\hat{j} + (۷/۰۰\text{N})\hat{k}$ بر جسم متحرکی به جرم ۲/۰۰kg که از مکان اولیهٔ $\vec{d}_i = (۳/۰۰\text{m})\hat{i} - (۲/۰۰\text{m})\hat{j} + (۵/۰۰\text{m})\hat{k}$ به مکان نهایی $\vec{d}_f = -(۵/۰۰\text{m})\hat{i} + (۴/۰۰\text{m})\hat{j} + (۷/۰۰\text{m})\hat{k}$ در مدت ۴/۰۰s می‌رود، وارد شده است. مطلوب است (الف) کار انجام شده توسط نیرو بر جسم در بازهٔ زمانی ۴/۰۰s، (ب) توان متوسط ناشی از نیرو در آن بازه، و (پ) زاویهٔ میان بردارهای $\vec{d}_i$ و $\vec{d}_f$.

حل: (الف) جابه‌جایی جسم برابر است با

$$\vec{d} = \vec{d}_f - \vec{d}_i = (-۸/۰۰\text{m})\hat{i} + (۶/۰۱\text{m})\hat{j} + (۲/۰۰\text{m})\hat{k}$$

با استفاده از رابطهٔ ۷-۸ داریم

$$W = \vec{F}\cdot\vec{d} = (۳/۰۰\text{N})(-۸/۰۰\text{m}) + (۷/۰۰\text{N})(۶/۰۰\text{m}) + (۷/۰۰\text{N})(۲/۰۰\text{m}) = ۳۲/۰\text{J}$$

(ب) توان متوسط برابر است با

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{t} = \frac{۳۲/۰}{۴/۰۰} = ۸/۰۰\,\text{W}$$

(پ) فاصله از مبدأ مختصات تا نقطهٔ اولیه برابر است با:

$$d_i = \sqrt{(۳/۰۰\text{m})^۲ + (-۲/۰۰\text{m})^۲ + (۵/۰۰\text{m})^۲} = ۶/۱۶\text{m}$$

و فاصله از مبدأ مختصات تا مکان نهایی برابر است با

$$d_f = \sqrt{(-۵/۰۰\text{m})^۲ + (۴/۰۰\text{m})^۲ + (۷/۰۰\text{m})^۲} = ۹/۴۹\text{m}$$

ضرب اسکالر آن‌ها برابر است با

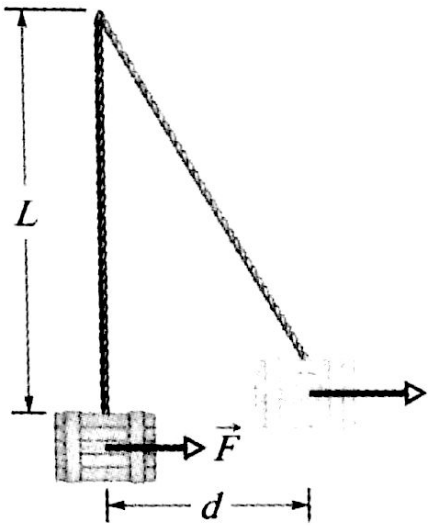
$$\vec{d}_i\cdot\vec{d}_f = (۳/۰۰\text{m})(-۵/۰۰\text{m}) + (-۲/۰۰\text{m})(۴/۰۰\text{m}) + (۵/۰۰\text{m})(۷/۰۰\text{m}) = ۱۲/۰\text{m}^۲$$

بنابراین زاویهٔ بین این دو بردار برابر است با

$$\phi = \cos^{-۱}\left(\frac{\vec{d}_i\cdot\vec{d}_f}{d_i\,d_f}\right) = \cos^{-۱}\left(\frac{۱۲/۰}{(۶/۱۶)(۹/۴۹)}\right) = ۷۸/۲^\circ$$

Scanned by CamScanner

۵۷- جعبه‌ای به جرم $۲۳۰\,\text{kg}$ از انتهای طنابی به طول $L=۱۲/۰\,\text{m}$ آویزان است. با نیروی متغیر $\vec{F}$ جعبه را به طور افقی رو به جلو هل می‌دهیم تا به اندازهٔ $d=۴/۰۰\,\text{m}$ به این طرف حرکت کند (شکل ۷-۴۴). (الف) وقتی جعبه در این مکان نهایی است، بزرگی $\vec{F}$ چقدر است؟ در طی جابه‌جایی جعبه (ب) کار کل انجام شده روی آن، (پ) کار انجام شده توسط نیروی گرانشی روی جعبه، و (ت) کار انجام شده توسط کششی که از ریسمان به جعبه وارد می‌آید، چقدر است؟ (ث) با توجه به اینکه جعبه پیش و پس از جابه‌جایی بدون حرکت است، با استفاده از پاسخ‌های (ب)، (پ) و (ت) کاری را که نیروی $\vec{F}$ روی جعبه انجام می‌دهد، به دست آورید. (ج) چرا کار نیرو برابر با حاصلضرب جابه‌جایی افقی در پاسخ (الف) نیست؟



شکل ۷-۴۴ مسئلهٔ ۵۷

حل: (الف) برای این‌که جعبه در حالت تعادل بماند، $\vec{F}$ باید دارای بزرگی‌ای مشابه مؤلفهٔ افقی کشش طناب $T\sin\theta$ باشد که θ زاویهٔ بین طناب (در مکان نهایی) و راستای عمودی است.

Scanned by CamScanner

$$\theta = \sin^{-1}\frac{L}{d} = \sin^{-1}\left(\frac{۴/۰۰}{۱۲/۰}\right) = ۱۹/۵^\circ$$

از طرفی مؤلفهٔ عمودی کشش طناب باید برابر وزن باشد

$$T\cos\theta = mg$$

$$T = (۲۳۰\,\mathrm{kg})(۹/۸۰\,\mathrm{m/s^۲})/\cos ۱۹/۵^\circ = ۲۳۹۱\,\mathrm{N}$$

بنابراین داریم

$$F = T\sin\theta \Rightarrow F = (۲۳۹۱\,\mathrm{N})\sin ۱۹/۵^\circ = ۲۳۹۱\,\mathrm{N}$$

(ب) چون تغییری در انرژی جنبشی وجود ندارد، کار خالص صفر است.

$$\Delta K = W \Rightarrow \Delta K = ۰ \Rightarrow W = ۰$$

(پ)

$$W_g = \vec{F}_g \cdot \vec{d} = -mgh,\quad h = L(۱-\cos\theta)$$

h مؤلفهٔ عمودی جابه‌جایی است. با $L = ۱۲/۰\,\mathrm{m}$ به‌دست می‌آوریم

$$W_g = -۱۵۴۷\,\mathrm{J} = -۱/۵۵\,\mathrm{kJ}$$

(ت) مسیر یک دایره است بنابراین بردار کشش در هر جایی عمود بر راستای حرکت است بنابراین کشش صفر است $(\cos ۹۰^\circ = ۰)$.

(ث)

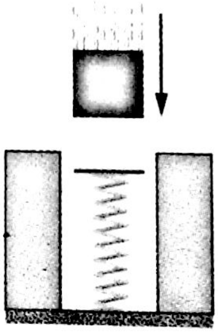
$$\Delta K = W = W_g + W_F = ۰$$

$$W_F = -W_g = ۱/۵۵\,\mathrm{kJ}$$

(ج) چون نیرو متغیر است.

Scanned by CamScanner

۶۲- قطعه‌ای به جرم ۲۵۰g روی فنر واهلیدهٔ قائمی با ثابت فنر $k = ۲/۵\,\text{N/cm}$ فرو می‌افتد (شکل ۷-۴۶). قطعه به فنر می‌چسبد و فنر را تا پیش از توقف لحظه‌ای $۱۲\,\text{cm}$ فشرده می‌کند. هنگامی که فنر فشرده می‌شود، چقدر کار توسط (الف) نیروی گرانشی وارد بر آن و (ب) نیروی فنر انجام شده است؟ (پ) تندی قطعه درست پیش از برخورد آن با فنر چقدر است؟ (فرض کنید اصطکاک ناچیز است.) (ت) اگر تندی در هنگام برخورد دو برابر شود، فشردگی بیشینهٔ فنر چقدر می‌شود؟



شکل ۷-۴۶ مسئلهٔ ۶۲

حل: (الف) فشردگی فنر برابر است با $d = ۰/۱۲\text{m}$. کار انجام شده به وسیلهٔ گرانش برابر است با

$$W_۱ = mgd = (۰/۲۵\,\text{kg})(۹/۸\,\text{m/s}^۲)(۰/۱۲\,\text{m}) = ۰/۲۹\,\text{J}$$

(ب) کار انجام شده توسط فنر برابر است با

$$W_۲ = -\frac{۱}{۲}kd^۲ = -\frac{۱}{۲}(۲۵۰\,\text{N/m})(۰/۱۲\,\text{m})^۲ = -۱/۸\,\text{J}$$

(پ) با استفاده از قضیه کار- انرژی جنبشی می‌توان تندی جسم درست قبل از برخورد به فنر v_i را محاسبه کرد.

$$\Delta K = ۰ - \frac{۱}{۲}mv_i^۲ = W_۱ + W_۲$$

$$v_i = \sqrt{\frac{(-۲)(W_۱ + W_۲)}{m}} = \sqrt{\frac{(-۲)(۰/۲۹\,\text{J} - ۱/۸\,\text{J})}{۰/۲۵\,\text{kg}}}$$

$$= ۳/۵\,\text{m/s}$$

(ت) اگر $v_i' = ۷\,\text{m/s}$ باشد، مراحل بالا را برای یافتن d' به‌طور معکوس طی می‌کنیم.

$$۰ - \frac{۱}{۲}mv_i'^۲ = W_۱' + W_۲' = mgd' - \frac{۱}{۲}k\,d'^۲$$

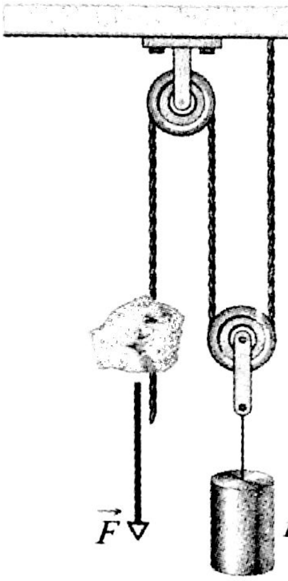
با انتخاب ریشهٔ مثبت داریم

Scanned by CamScanner

$$d' = \frac{mg + \sqrt{m^۲ g^۲ + mk v_i'^۲}}{k} \Rightarrow d' = ۰/۲۳\,\mathrm{m}$$

Scanned by CamScanner

۶۵- در شکل ۷-۴۷، ریسمانی از دور دو قرقرهٔ بدون جرم و بدون اصطکاک می‌گذرد. وزنه‌ای به جرم $m = ۲۰\,\mathrm{kg}$ از یکی از قرقره‌ها آویزان است، و نیروی $\vec{F}$ بر سر آزاد ریسمان وارد می‌شود. (الف) اگر بخواهیم وزنه را با تندی ثابتی بالا بیاوریم، بزرگی $\vec{F}$ چقدر باید باشد؟ (ب) برای بالا بردن وزنه به اندازهٔ $۲/۰\,\mathrm{cm}$، طرف آزاد ریسمان را چقدر باید کشید؟ در حین بالا بردن، کار انجام شده روی وزنه توسط (پ) نیروی وارده (از طریق ریسمان) و (ت) نیروی گرانشی چقدر است؟ (*راهنمایی:* وقتی ریسمانی به دور یک قرقره مشابه شکل بپیچد، قرقره را با نیروی خالصی که دو برابر کشش ریسمان است، می‌کشد.)



شکل ۷-۴۷ مسئلهٔ ۶۵

حل: شتابی وجود ندارد بنابراین نیروی بالابرنده برابر است با وزن جسم. از طرفی بزرگی نیروی $\vec{F}$ که از طرف شخص وارد می‌شود برابر است با کشش ریسمان.

(الف) $۲T = mg\,,\quad |\vec{F}| = T \;\Rightarrow ۲F = mg \Rightarrow F = ۹۸\,\mathrm{N}$

(ب) جابه‌جایی سمت چپ، برابر با مجموع جابه‌جایی‌های سمت راست است بنابراین:

$d = ۲\,\mathrm{cm} + ۲\,\mathrm{cm} = ۴\,\mathrm{cm} = ۰/۰۴۰\,\mathrm{m}$

(پ) چون در انتهای چپ $\vec{F}$ و $\vec{d}$ به سمت پایین هستند

Scanned by CamScanner

$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (۹۸\,\mathrm{N})(۰/۰۴۰\,\mathrm{m}) = ۳/۹\,\mathrm{J}$

(ت) چون نیروی گرانشی $\vec{F}_g$ (با بزرگی mg) خلاف جهت جابه‌جایی وزنه $d_c = ۰/۰۲۰\,\mathrm{cm}$ (به طرف بالا) است، داریم

$W = \vec{F}_g \cdot \vec{d}_c = -(۱۹۶\,\mathrm{N})(۰/۰۲۰\,\mathrm{m}) = -۳/۹\,\mathrm{J}$

که با رابطهٔ $\Delta K = W_a + W_g$ سازگار است زیرا انرژی جنبشی تغییر نمی‌کند.

Scanned by CamScanner

۷۴- ذره‌ای در امتداد مسیری مستقیم در حالی که نیروی $\vec{F}=(۲\text{N})\hat{\text{i}}-(۴\text{N})\hat{\text{j}}$ بر آن وارد می‌شود، جابه‌جایی $\vec{d}=(۸\text{m})\hat{\text{i}}+c\hat{\text{j}}$ را انجام می‌دهد. (نیروهای دیگری نیز بر ذره وارد می‌شوند.) اگر کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}$ روی ذره (الف) صفر، (ب) مثبت، و (ت) منفی باشد، مقدار c چقدر است؟

حل: با استفاده از رابطهٔ ۷–۸ و در نظر گرفتن یکاهای SI داریم:

Scanned by CamScanner

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = (۲\hat{\mathrm{i}} - ۴\hat{\mathrm{j}}) \cdot (۸\hat{\mathrm{i}} + c\hat{\mathrm{j}}) = ۱۶ - ۴c$$

$$W = ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴c = ۰ \Rightarrow c = ۱۶/۴ = ۴\,\mathrm{m}$$

$$W > ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴c > ۰ \Rightarrow c < ۴\,\mathrm{m}$$

$$W < ۰ \Rightarrow ۱۶ - ۴c < ۰ \Rightarrow c > ۴\,\mathrm{m}$$

Scanned by CamScanner

۷۸- یک جعبهٔ CD در حالی که بر آن نیروی $\vec{F}_a$ وارد شده است، روی کفی در جهت مثبت محور x می‌لغزد. نیرو در جهت محور x است و دارای مؤلفهٔ x برابر $F_{ax} = ۹x - ۳x^۲$ است که در آن x برحسب متر و F_{ax} برحسب نیوتون است. جعبه از حالت سکون در مکان $x = ۰$ شروع به لغزش کرده و تا وضعیت سکون مجدد حرکت می‌کند. (الف) کار انجام شده توسط $\vec{F}_a$ روی جعبه را برحسب تابعی از x رسم کنید. (ب) در چه مکانی این کار بیشینه است؟ و (پ) این مقدار بیشینه

Scanned by CamScanner

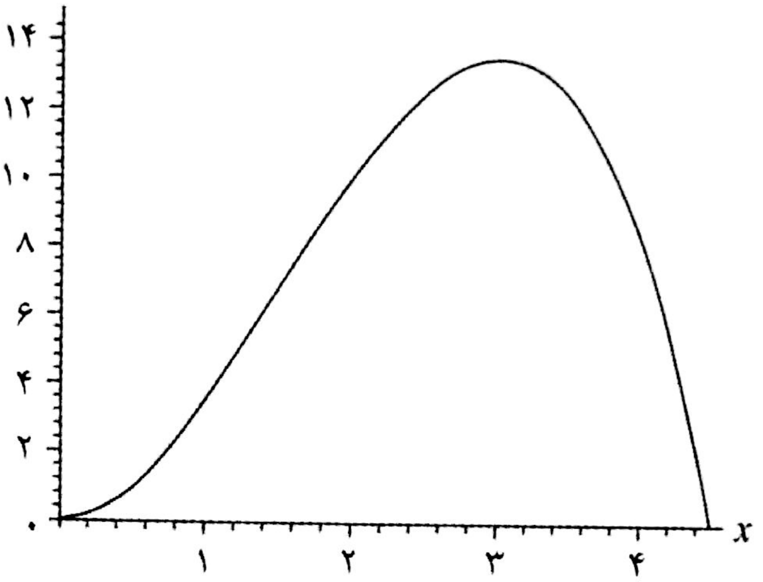
چقدر است؟ (ت) در چه مکانی کار به مقدار صفر کاهش می‌یابد؟ (ث) جعبه در چه مکانی دوباره ساکن می‌شود؟

حل: (الف) با استفاده از رابطهٔ ۷–۳۲ داریم:

$$W = \int F(x)\,dx = \int_{۰}^{x} (۹x - ۳x^{۲})\,dx = \frac{۹}{۲}x^{۲} - x^{۳}$$

نمودار در شکل رسم شده است.

(ب) با مشتق‌گیری از W و مساوی صفر قرار دادن آن و یا به‌طور ساده مساوی صفر قرار دادن F می‌توان این مقدار را یافت.



(ب)

$$\frac{dW}{dx} = ۰ \Rightarrow F(x) = ۰ \Rightarrow ۹x - ۳x^{۲} = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰,\ x = ۳/۰۰$$

که $x = ۳/۰۰$ قابل قبول است.

(پ)

$$W\big|_{x=۳/۰۰} = \frac{۹}{۲}(۳/۰۰)^{۲} - (۳/۰۰)^{۳} = ۱۳/۵۰\,\mathrm{J}$$

(ت)

$$W = ۰ \Rightarrow \frac{۹}{۲}x^{۲} - x^{۳} = ۰ \Rightarrow x\left(\frac{۹}{۲} - x\right) = ۰$$

$$\Rightarrow x = ۰, x = ۴/۵۰\,\mathrm{m}$$

(ث) جعبه هنگامی که $v = ۰$ است، ساکن می‌شود. از آن‌جا که $W = \Delta K = \frac{۱}{۲}mv^{۲}$، این شرط وقتی برقرار می‌شود که $W = ۰$ است. که این شرط در $x = ۴/۵۰\,\mathrm{m}$ رخ می‌دهد.

Scanned by CamScanner